Sur la conjecture abc version corps de fonction, d'Oesterle

Frédéric Campana

SUR LA CONJECTURE ABC, VERSION CORPS DE FONCTIONS D'OESTERLÉ

Frédéric Campana

July 20, 2006

Résumé: Nous démontrons une forme faible de la version corps de fonctions complexe, due à Oesterle, de sa conjecture abc: soit B une courbe projective complexe, et D un diviseur réduit de degré $d > 0$ sur B de la surface $S := B \times \mathbb{P}^1$. Alors le nombre de points d'intersection comptés *sans multiplicités* de D et du graphe H d'une section de la projection$q : S \to B$, est au moins $(d - 2[\sqrt{d}]).n$, à une constante additive près ne dépendant que de (D, B), si H est de degré $n > 0$ sur $\mathbb{P}^1$. (La conjecture affirme l'existence d' au moins $(d - 2 - \epsilon).n$ points).

Abstract: We show a weak form of Oesterlé's complex function field version of his abc conjecture: let B be a complex projective curve, and D a divisor on the surface $S := B \times \mathbb{P}^1$, D of degree $d > 0$ over B. For any map $h : B \to \mathbb{P}^1$ of any geometric degree $n > 0$, the number of intersection points, counted *without multiplicities*, of D with the graph of h is then at least $(d - 2[\sqrt{d}]).n$, up to an additive constant depending only on (B, D). (The conjecture asserts the existence of $(d - 2 - \epsilon).n$ intersection points at least, instead).

Remarciements: Je remercie vivement J. Oesterlé et le rapporteur, le premier pour m'avoir communiqué sa conjecture et signalé une lacune dans une version antérieure; le rapporteur pour sa lecture attentive, repérant une erreur résiduelle.

1 Introduction

L'énoncé suivant est une forme très affaiblie de la conjecture *abc* pour les corps de fonctions, due à J. Oesterle ([Oe 05]), qui est l'énoncé ci-dessous, mais avec $[\sqrt{d}]$ remplacé par $1+\epsilon$, $\epsilon > 0$ arbitraire; sous forme optimiste l'inégalité subsisterait avec $\epsilon = 0$.

Théorème 1.1 *Soit B une courbe complexe lisse et connexe de genre g. Soit $S := B \times \mathbb{P}_1$, munie des projections $p : S \to \mathbb{P}^1$ et $q : S \to B$. Soit $D \subset S$ une courbe projective réduite de degré géométrique $d > 0$ sur B.*

Il existe alors une constante $C := C(D, B)$ telle que:

Pour tout $n > 0$, et pour toute application holomorphe surjective $h : B \to \mathbb{P}_1$, de degré géométrique n, de graphe $H \subset S$, non contenu dans D, le nombre N_H de points d'intersection (deux à deux distincts) de D et H vérifie: $N_H \geq n.(d - 2[\sqrt{d}]) - C$.

Remarques: 1. Lorsque D est un diviseur *constant* constitué de la réunion des graphes de d sections constantes distinctes de q, la conjecture est une conséquence immédiate de la formule de Riemann-Hurwitz, qui fournit: $N \geq (d-2)n - (2g-2)$.

2. La conjecture est invariante par transformation birationnelle de $S = B \times \mathbb{P}^1$ au-dessus de B, remplaçant D, H par leurs transformées strictes. En effet, le nouvel n diffère alors de l'ancien par une constante *additive*, égale à la différence cohomologique entre une section constante de q et sa transformée stricte, divisée par la classe d'une q-fibre.

3. Si $d \leq 3$, on peut transformer birationnellement D en un diviseur constant à l'aide du birapport. La conjecture est donc vraie pour $d \leq 3$ (mais ouverte déjà pour $d = 4$). On peut en déduire aisément que $N_H \geq n.(d/3) - C'(D, B)$.

4. La conjecture est vraie pour (D, B) si elle l'est pour (D', B') déduit par changement de base fini $B' \to B$. On supposera donc dans la suite que D est la réunion des graphes D_j de d sections distinctes $s_j : B \to S$ de q, pour $j \in J := \{1, \cdots, d\}$.

5. La méthode suivie est, en plus simple, celle de [Ca 04], issue des considérations orbifoldes de [Ca 01].

Notations et conventions: On supposera que la section à l'infini $B_\infty := B \times \{\infty\}$ diffère de H, et coupe D transversalement en δ points, δ étant le degré de D sur $\mathbb{P}^1$. On notera $\delta_j \geq 0$ les degrés des sections s_j, et δ est donc la somme des δ_j.

On notera x (resp. y) une coordonnée locale sur B (resp. une coordonnée linéaire sur $\mathbb{C} := \mathbb{P}^1 - \{\infty\}$), et dx (resp. dy) les formes différentielles déduites de ces fonctions par dérivation. On notera aussi $p \in B$ un point fixé de B (choisi en fonction de h), et $P := q^{-1}(p)$ sa q-fibre réduite.

Definition 1.2 *Soit m, ν deux entiers, et $w \in H^0(S, Sym^m(\Omega^1_S)(2mB_\infty + \nu.P))$, $m > 0$. On dit que w est* **tangente à** *D si $s_j^*(w) = 0$, pour tout $j \in J$. On note $W_{m,\nu.p}$ le sous-espace vectoriel complexe de $H^0(S, Sym^m(\Omega^1_S)(2mB_\infty + \nu.P))$ constitué des formes pluridifférentielles tangentes à D.*

Lemme 1.3 *Si $m \geq [\sqrt{d}]$, il existe $\nu(m)$ tel que si $\nu \geq \nu(m)$, alors $W_{m,\nu.p}$ est de dimension au moins 1, ceci pour tout $p \in B$.*

Démonstration: Ecrivons $w = \sum_{h=0}^{h=m} (dy)^{\otimes(m-h)} \otimes w_h$, avec $w_h \in q^*(H^0(B, hK_B + \nu.p)) \otimes \pi^*(H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(2h))), \pi : S \to \mathbb{P}^1$ étant la seconde projection. Notons $V := V_{m,\nu.p}$ l'espace vectoriel complexe des formes pluridifférentielles méromorphes sur S de cette forme. Alors, pour tout $j \in J$, on a une restriction linéaire naturelle $s_j^*(w) \in H^0(B, mK_B + 2m\{\delta_j\} + \nu.p)$ dont le noyau est de codimension au plus: $((2m-1)(g-1) + 2m\delta_j + \nu)$ dans V, avec $\{\delta_j\} := s_j^*(B_\infty)$. La codimension dans V de $W_{m,\nu.p}$ est donc au plus $(2md(g-1) + 2m\delta + d.\nu)$.

Supposons (pour simplifier l'écriture) que $g \geq 1$, et que $\nu \geq (2g-1)$. Alors V est de dimension $(\sum_{h=0}^{h=m}(2h+1).\nu) = ((m+1)^2.\nu)$. Si $(m+1)^2 > d$, et si $\nu \geq \nu(m,d,\delta)$, avec $\nu(m,d,\delta) := 1 + [(2m/(m+1)^2 - d)).(d(g-1)+\delta)]$, alors $W_{m,\nu.p}$ n'est donc pas réduit à $\{0\}$, et ceci pour tout choix de $p \in B$•

Conventions: Soit maintenant $h : B \to S$ une section de q de degré n. On fixe m, ν satisfaisant les inégalités du lemme précédent. On supposera, quitte à choisir p générique, et à modifier un peu B_∞, que: $s(p) \notin (B_\infty \cup D)$, et que B_∞ coupe D transversalement (en δ points distincts, donc). On choisit alors $0 \neq w \in W_{m,\nu.p}$.

Lemme 1.4 *Soit $b \in B$ tel que $h(b) \in D$. Soit $t_j := t_j(b)$ l'ordre de contact en $h(b)$ de H avec $D_j, j \in J$, et $t := \sum_{j\in J} t_j$. Soit $t' = t'(b)$ l'ordre d'annulation en b de $h^*(w) \in H^0(B, mK_B + 2mB_{\infty|H} + \nu.p))$. Si $h(b) \notin B_\infty$, alors:*

1. $t' \geq (t-1)$ si $h(b)$ est un point lisse de D.

2. $t' \geq (t - 1 - T(r) - d)$, si $r := h(b)$ est un point singulier de D, et si $T(r) := \sum_{j<k\in J_r} \delta_{j,k}$, où $J_r \subset \{1, \cdots, d\}$ est l'ensemble des j tels que $r \in D_j$, et $\delta_{j,k}$ est l'ordre de contact en r des branches D_j et D_k de D.

3. Si $h(b) \in B_\infty$, $h^*(w)$ a en b un pôle d'ordre au plus $(2m - t + 1)$.

Démonstration: Assertion 1: Soit D_j une composante irréductible locale de D contenant $a := h(b)$, et $y = s_j(x)$ l'expression locale de la section s_j dans des coordonnées locales (x, y) près de a. On peut donc écrire, sur un voisinage analytique de a dans S: $w(x,y) = (dy - s'_j(x)dx) \otimes w_1(x) + (y - s_j(x)).w_2(x,y)$, avec w_1 (resp. w_2) une section locale de $Sym^{m-1}(\Omega^1_S)$ (resp. de $Sym^m(\Omega^1_S)$).

Puisque D_j et H ont en a un contact d'ordre t, on a: $h(x) = s_j(x) + x^t.u(x)$, et $h^*(dy) = s'_j(x)dx + x^{(t-1)}v(x)$, avec u, v des 1-formes holomorphes non nulles en b.

Donc $h^*(w) = x^{(t-1)}v(x)dx \otimes w_1(x) + x^t.u(x)w_2(x, s(x))$. D'où l'assertion.

Assertion 2: soit $t_+ := max\{t_j, j \in J_r\} = t_{j_0}$. On a donc: $t' \geq (t_+ - 1)$, par l'argument précédent. Il suffit donc de voir que $t_+ \geq t - T(r) - d$. Or, $t := \sum_{j\in J_r} t_j \leq \sum_{j\in J'_r} t_j + d$, si $J'_r \subset J_r$ est l'ensemble des $j \in J_r$ tels que H soit tangente à D_j. Pour chaque $j_0 \neq j \in J'_r$, on a: $t_j = \delta_{j,j_0}$, puisque l'ordre de contact avec H est une valuation sur l'ensemble des germes de courbes lisses de S passant par r. Donc $t \leq t_+ + \sum_{j\in J'_r} \delta_{j,j_0} + d \leq t_+ + T(r) + d$. D'où l'assertion.

Assertion 3: elle se déduit de l'assertion 1 en exprimant w dans les coordonnées locales $(x, z := 1/y)$ près de $h(b)$ •

Démonstration du théorème 1.1: Considérons h, m, ν, p, w comme ci-dessus. Si $h^*(w) \neq 0$, soit Z (resp. P) le nombre de ses zéros (resp. pôles) comptés avec multiplicités. Alors $Z - P = 2m(g-1)$. Les seuls pôles de $h^*(w)$ sont en p (d'ordre au plus ν), et en les b où $h(b) \in B_\infty$ (d'ordres $(2m - t + 1)$ au plus).

Donc: $P \leq \nu + 2mn - \sum_{(h(b)\in B_\infty \cap D)}(t-1)$.

Soit maintenant $T := \sum_{r\in R} T(r)$, où R est l'ensemble des points singuliers de D. on a donc: $T \leq \sum_{(j<k\in J)} D_j.D_k = \sum_{(j<k\in J)}(\delta_j + \delta_k) \leq d\delta/2$, et le lemme 1.4 montre que: $Z \geq \sum_{(h(b)\in D-R-B_\infty)}(t(b)-1) + \sum_{(r:=h(b)\in R)}(t(b) - 1 - T(r) - d) = \sum_{D-B_\infty}(t-1) - T - d.|R|$.

Pour tout $t \geq 1$, soit N_t le nombre des $b \in B$ tels que $t(b) = t$. On a donc: $N := N_H := \sum_{t\geq 1} N_t$, et aussi: $(\sum_{b\in B} t.N_t) = H.D = dn + \delta$. Des deux inégalités précédentes résulte que: $2m(g-1) = Z-P \geq (\sum_{b\in B}(t(b)-1)-T-d.|R|-\nu-2mn) = \sum_{t\geq 1}(t-1)N_t - T - d.|R| - \nu - 2mn = (dn+\delta) - N_H - T - d.|R| - \nu - 2mn$. Donc: $N_H \geq n(d-2m) - C$, si $C := T + d.|R| + \nu - 2m(g-1)$. Choisissant $m = [\sqrt{d}]$ fournit l'assertion dans ce cas.

L'estimation obtenue ne dépend pas de w, générique dans $W_{m,\nu.p}$, mais seulement de m, ν, g, D, fixés. Si $h^*(w) = 0$, pour h fixée et w générique dans $W_{m,\nu.p}$, $p \in B$ générique, on a alors $h^*(w) = 0$ pour toute $w \in W_{m,\nu.p}$. On peut donc fixer $0 \neq w \in W_{m,\nu.p}$ désormais. Puisque $h^*(w) = 0$, La section w définit une hypersurface $Y_w \subset \mathbb{P}(\Omega^1_S)$ génériquement finie sur S. Les sections h telles que $h^*(w) = 0$ sont des courbes de S dont les relèvements canoniques à $\mathbb{P}(\Omega^1_S)$ sont contenues dans Y_w et sont des courbes intégrales algébriques du feuilletage algébrique (singulier) défini par w sur Y_w (ou sur l'une de ses désingularisées). Le théorème de Jouanolou ([J]) affirme alors que ces courbes intégrales algébriques forment une famille bornée (plus précisément: soit finie, soit fibres d'un pinceau) sur Y_w et donc sur S. Pour $n \geq n_0$ assez grand, H n'est donc pas contenue dans cette famille, et le résultat précédent s'applique. Il existe donc bien une constante C_0 (non effective, dépendant de n_0) $N \geq n(d - 2[\sqrt{d}]) - C_0$, pour toute $H\bullet$

References

[Ca 01] F.Campana. Special Varieties, Orbifolds, and Classification Theory. Ann. Inst. Fourier 54 (2004), 499-665. (Aussi sur math. AG/0110051).

[Ca 04] F.Campana. Fibres multiples sur les surfaces: aspects géométriques, arithmétiques et hyperboliques. Man. Math. 117 (2005), 429-461. (Aussi sur math. AG/0410469).

[J78] J.P. Jouanolou. Hypersurfaces solutions d'une équation de Pfaff analytique. Math. Ann. 232 (1978), 239-248.

[Oe 05] J. Oesterlé. Communication orale. Juin 2005.

Adresse: Frédéric Campana.
Université Nancy 1.Département de Mathématiques
BP239. F-54506-Vandoeuvre-les-nancy.
E-mail: campana@iecn.u-nancy.fr